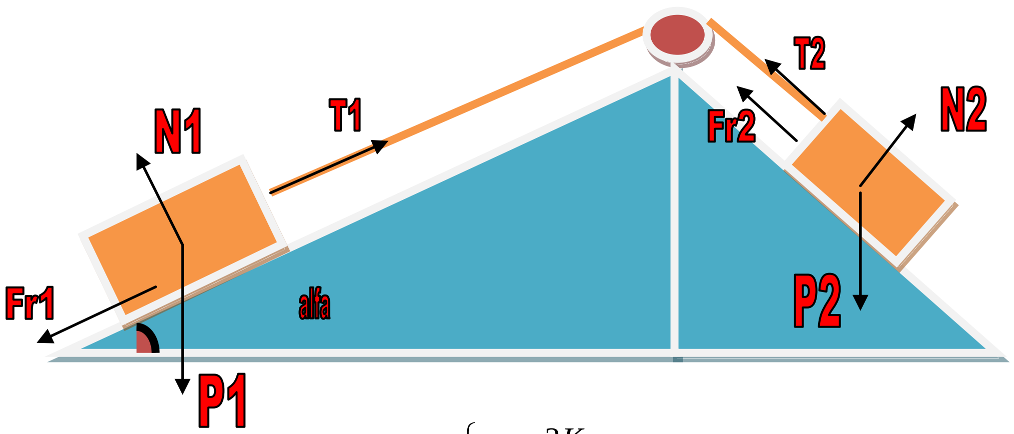
Dos planos inclinados con dos cuerpos, unidos a través de una cuerda que pasa por una polea despreciable. Supongamos que hay rozamiento en los dos planos inclinados. Supongamos que el sistema se mueva de izquierda a derecha, pensando que el cuerpo dos hace que se traslade el sistema en ese sentido. Nos piden la aceleración del sistema.

Este problema es una clásico de aplicación de la Segunda Ley de Newton y la forma de operar para obtener el resultado pedido. Veamos su esquema:



Los datos son los siguientes:

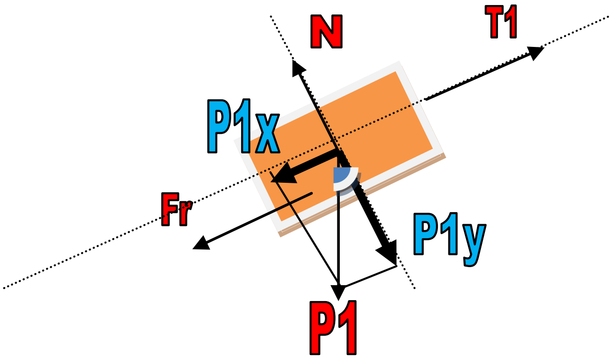
$$\begin{cases} m_1 = 2Kg \\ m_2 = 5Kg \\ \alpha = 30^{\circ} \\ \beta = 45^{\circ} \\ \mu = 0{,}2 \end{cases}$$

Como podemos comprobar en el dibujo, tanto en el cuerpo 1 como el 2, todas las fuerzas menos el peso están sobre algún eje, el x o bien el eje y, sin embargo el peso está fuera de los eje, así que tenemos que utilizar las funciones trigonométricas para descomponer el peso en los dos ejes.

Esto lo tenemos que hacer, porque la 2ª Ley de la Dinámica de Newton se hace para cada uno de los ejes de un cuerpo.

Este razonamiento lo vamos a utilizar tanto en el cuerpo 1 como en el 2.

Veamos el análisis de fuerzas del cuerpo 1:



$$\begin{cases} P_{1x} = P_1 sen\alpha \\ P_{1y} = P_1 \cos\alpha \end{cases}$$

La componente y del peso al ser el cateto contiguo al ángulo es coseno (truco: continuo- coseno).
La componente x del peso al ser el cateto opuesto al ángulo es seno (truco: opuesto- seno).

Ahora si sabemos todas las fuerzas que intervienen en el cuerpo 1 y están sobre los ejes cartesianos, así que podemos aplicar la segundo Ley de Newton para cada uno de los ejes.

Antes de nada, recordar que en el eje y, no hay movimiento, así que la aceleración será cero, por tanto la sumatoria de todas las fuerzas en el eje y también será cero:

$$\begin{cases} \sum F_y = N_1 - P_{1y} = 0 \\ \sum F_x = T_1 - F_{r1} - P_{1x} = m_1 a \end{cases}$$

Como sabemos cuánto son las descomposiciones del peso y la fuerza de rozamiento podemos desglosar las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} N_1 - P_1 \cos\alpha = 0 \\ T_1 - \mu N_1 - P_1 sen\alpha = m_1 a \end{cases}$$

Si despejamos la N en la primera ecuación podemos sustituirla en la segunda:

$$\begin{cases} N_1 = P_1 \cos\alpha \\ T_1 - \mu N_1 - P_1 sen\alpha = m_1 a \end{cases}$$

$$T_1 - \mu P_1 \cos\alpha - P_1 sen\alpha = m_1 a$$

Así obtenemos la siguiente ecuación:

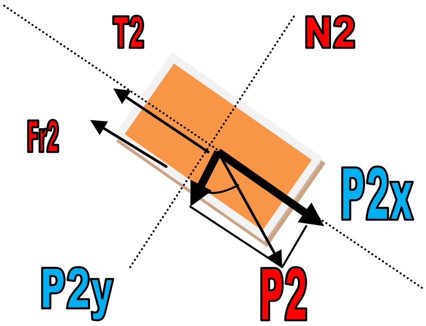
$$\boxed{T_1 - \mu P_1 \cos\alpha - P_1 sen\alpha = m_1 a}$$

Nos la guardamos para luego.

Ahora tenemos que analizar el cuerpo dos, que está en el segundo plano inclinado, que tiene diferente inclinación aunque vamos a considerar el mismo coeficiente de rozamiento. La Segunda Ley de Newton la aplicaremos igual que en el primer plano inclinado, sólo hay que tener cuidado con los signos, para ello seguirnos el siguiente criterio:

Tomaremos positivo todas aquellas fuerzas que tengan el mismo sentido que la aceleración.

Y la aceleración la hemos tomado de izquierda a derecha, así que nuestro esquema es:



$$\begin{cases} P_{2x} = P_2 sen\beta \\ P_{2y} = P_2 \cos\beta \end{cases}$$

Aplicando la Segunda ley de Newton en ambos ejes:

$$\begin{cases} \sum F_y = N_2 - P_{2y} = 0 \\ \sum F_x = P_{1x} - T_2 - F_{r2} = m_2 a \end{cases}$$

Desglosamos cada magnitud:

$$\begin{cases} \sum F_y = N_2 - P_2 \cos\beta = 0 \\ \sum F_x = P_2 sen\beta - T_2 - \mu N_2 = m_2 a \end{cases}$$

Ahora despejamos la reacción del plano horizontal en la primera ecuación y quitamos las sumatorias:

$$\begin{cases} N_2 = P_2 \cos\beta \\ P_2 sen\beta - T_2 - \mu N_2 = m_2 a \end{cases}$$

Ahora podemos sustituir la primera ecuación en la segunda:

$$\boxed{P_2 sen\beta - T_2 - \mu P_2 \cos\beta = m_2 a}$$

Con esta ecuación y la conseguida en el primer plano inclinado podemos juntarlas para encontrar la aceleración:

$$T_1 - \mu P_1 \cos\alpha - P_1 sen\alpha = m_1 a$$

$$P_2 sen\beta - T_2 - \mu P_2 \cos\beta = m_2 a$$

Como la polea es despreciable, entonces las tensiones son iguales, esto es:

$$T_1 = T_2 = T$$

Teniendo en cuenta esto, podemos sumar las dos ecuaciones así las tensiones se van. Hemos utilizado el método de reducción, de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$T - \mu P_1 \cos\alpha - P_1 sen\alpha = m_1 a$$

$$P_2 sen\beta - T - \mu P_2 \cos\beta = m_2 a$$

$$P_2 sen\beta - \mu P_1 \cos\alpha - P_1 sen\alpha - \mu P_2 \cos\beta = m_1 a + m_2 a$$

Ahora podemos sacar factor común a la aceleración, y despejar la aceleración:

$$P_2 sen\beta - \mu P_1 \cos\alpha - P_1 sen\alpha - \mu P_2 \cos\beta = m_1 a + m_2 a$$

$$a = \frac{P_2 sen\beta - \mu P_1 \cos\alpha - P_1 sen\alpha - \mu P_2 \cos\beta}{m_1 + m_2}$$

Es bueno sacar factor común, así se simplifica un poco la ecuación:

$$\boxed{a = \frac{P_2(sen\beta - \mu\cos\beta) - P_1(\mu\cos\alpha + sen\alpha)}{m_1 + m_2}}$$

Podríamos hacer alguna cosa más:

$$a = \frac{P_2(sen\beta - \mu\cos\beta) - P_1(\mu\cos\alpha + sen\alpha)}{m_1 + m_2} =$$

$$\frac{m_2 g(sen\beta - \mu\cos\beta) - m_1 g(\mu\cos\alpha + sen\alpha)}{m_1 + m_2} =$$

$$\frac{m_2(sen\beta - \mu\cos\beta) - m_1(\mu\cos\alpha + sen\alpha)}{m_1 + m_2} g$$

La ecuación final de la aceleración sería:

$$\boxed{a = \frac{m_2(sen\beta - \mu\cos\beta) - m_1(\mu\cos\alpha + sen\alpha)}{m_1 + m_2} g}$$

A partir de la ecuación podríamos obtener conclusiones. Esta es una de las razones para que no se sustituya hasta al final, para poder analizar el resultado.

1. Si no hubiera fuerza de rozamiento, el coeficiente de rozamiento la haríamos cero:

$$\boxed{a = \frac{m_2 sen\beta - m_1 sen\alpha}{m_1 + m_2} g}$$

Lo cual, sólo dependería la aceleración de las masas y de las inclinaciones de los planos inclinados.

2. La aceleración obtenida es menor que la aceleración de la gravedad.
3. La masa 2 tienen que ser mayor que una cierta cantidad para que la situación sea dinámica:

$$m_2 \geq \frac{m_1(\mu \cos\alpha + sen\alpha)}{sen\beta - \mu \cos\beta}$$

Una vez que tenemos todas las ecuaciones despejadas podemos sustituir los valores y así encontrar la solución numérica.

Sin embargo utilizaremos como máxima:

Siempre que se pueda no se sustituye hasta el final.

Aunque hay ocasiones que es mejor sustituir los valores antes, por ejemplo cuando tenemos ecuaciones de segundo grado.